

Análise combinatória – Tópicos especiais

Teoria e exercícios · Matemática

30 problemas com gabarito comentado

Prof. Yuri Politano

1. Princípio da inclusão-exclusão (Fórmula de Crivo)

É uma fórmula utilizada para contar elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos.

Seja A um subconjunto finito. Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são subconjuntos de A , então

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Em sua versão um pouco mais simples, o princípio afirma que:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Entende-se por $\#A$ como a cardinalidade, ou seja a quantidade de elementos, do conjunto A .

Exemplo 1: Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou 7?

Solução: Definamos: A = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3. B = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 7. Queremos calcular $\#(A \cup B)$. Temos:

$$\#A = \left\lceil \frac{1000}{3} \right\rceil = 333; \quad [\] = \text{parte inteira};$$

$$\#B = \left\lceil \frac{1000}{7} \right\rceil = 142; \quad \#(A \cap B) = \left\lceil \frac{1000}{21} \right\rceil = 47 \quad (\text{Divisíveis por 3 e por 7}).$$

Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 333 + 142 - 47 = 428.$$

Exemplo 2: Sejam $n \geq 3$ um natural dado e $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de um conjunto dado A , todos com $2n$ elementos. Se dois quaisquer dos A_i 's têm exatamente dois elementos em comum e três quaisquer dos A_i 's têm interseção vazia, calcule o número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Solução: Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \\ &= \sum_{i_1} |A_{i_1}| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|. \end{aligned}$$

Pelo enunciado, $\sum_{i_1} |A_{i_1}| = \sum_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n 2n = 2n^2$, e

$$\sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \sum_{i_1 < i_2} 2 = 2 \binom{n}{2} = n(n-1),$$

uma vez que há exatamente $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ escolhas possíveis para i_1 e i_2 tais que $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$. Portanto, o conjunto $A_1 \cup \dots \cup A_n$ tem exatamente $2n^2 - n(n-1) = n(n+1)$ elementos.

Função φ de Euler. Para cada inteiro positivo n define-se $\varphi(n)$ como sendo o número de inteiros positivos que são primos com n e não superiores a n , isto é, que são primos com n e menores ou iguais a n . Assim, por exemplo: $\varphi(12) = 4$, pois os inteiros positivos que não superam 12 e são primos com 12 são 1, 5, 7 e 11; e $\varphi(7) = 6$, pois os inteiros positivos que não superam 7 e são primos com 7 são 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

A função φ é chamada de Função φ de Euler (1707-1783). O valor de $\varphi(n)$ pode ser calculado a partir da decomposição de n em fatores primos. Se a decomposição de n em fatores primos é

$$n = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_r^{j_r} \quad (p_1, p_2, \dots, p_r \text{ primos distintos}),$$

então

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Assim, por exemplo, como as decomposições de 120 e 729 em fatores primos são $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ e $729 = 3^6$, temos

$$\varphi(120) = 120 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 32,$$

$$\varphi(729) = 729 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 486.$$

Ou seja, no conjunto $\{1, 2, \dots, 120\}$ há 32 números primos com 120 e no conjunto $\{1, 2, \dots, 729\}$ há 486 números primos com 729.

EXERCÍCIOS · PARTE 1

Problema 01. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO que têm C em 1º lugar, ou A em 2º lugar, ou P em 3º lugar ou Í em 4º lugar?

Problema 02. Quantos são os inteiros, compreendidos entre 1 e 1000 inclusive, que são divisíveis por exatamente dois dos números 2, 3, 7 e 10? E por pelo menos dois?

Problema 03. Lançam-se 3 dados. Em quantos dos 6^3 resultados possíveis a soma dos pontos é 12?

Problema 04. Calcule $\varphi(360)$

Problema 05. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x + y + z = 12$ nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 7?

Problema 06. Quantos são os elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, 500\}$ que são divisíveis por 3 ou 5 mas não são divisíveis por 7?

Problema 07. Calcule o número de modos de colorir os vértices de um dodecágono regular usando duas cores, de modo que nenhum conjunto monocromático de vértices forme um polígono regular. (sugestão: Calcule o número de colorações sem triângulos equiláteros monocromáticos; em seguida, dentre essas colorações, calcule quantas têm um quadrado monocromático, dois quadrados monocromáticos ou três quadrados monocromáticos; por fim, use o princípio da inclusão-exclusão.)

2. Permutação Caótica

Uma permutação dos números $(1, 2, \dots, n)$ é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo. Assim, as permutações 2143 e 3142 são caóticas mas 1342 não é (1 está no seu lugar primitivo).

Para calcular o número D_n de permutações caóticas de $(1, 2, 3, \dots, n)$, defina-se A_i = conjunto das permutações de $(1, 2, 3, \dots, n)$ em que o número i ocupa o i -ésimo lugar, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, donde:

$$D_n = n! \left[\frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Exemplo: $D_4 = 4! \left[\frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] = 9$.

OBS: D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$.

n	D_n	$n!/e$
1	0	0,3...
2	1	0,7...
3	2	2,2...
4	9	8,8...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

EXERCÍCIOS · PARTE 2

Problema 08. Suponha $\#A = n$. Quantas são as funções $f : A \rightarrow A$ para as quais a equação $f(x) = x$ não possui solução? Quantas são as funções $f : A \rightarrow A$ bijetoras para as quais a equação $f(x) = x$ não possui solução?

Problema 09. Quantas são as permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ que têm exatamente 3 elementos no seu lugar primitivo?

Problema 10. Prove que, se $n \geq 3$, $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

Problema 11. Dois médicos devem examinar, durante uma mesma hora, 6 pacientes, gastando 10 minutos com cada paciente. Cada um dos 6 pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível?

Problema 12. Quantas são as permutações de $(1, 2, \dots, 2n)$ nas quais nenhum número ímpar ocupa seu lugar primitivo?

3. Contagem Dupla

Consiste no princípio bijetivo*, com uma mudança de enfoque. A ideia central é que se calcularmos um certo número de configurações de duas maneiras distintas sem cometer erros, então os resultados devem coincidir, fato que pode gerar conclusões interessantes.

* Podemos enunciar o princípio bijetivo da seguinte maneira: Se A e B são conjuntos finitos não vazios, então $\#A = \#B$ se e só se existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$.

Definimos: $I_n = \{j \in \mathbb{N}; 1 \leq j \leq n\}$ como o conjunto dos números naturais de 1 a n .

Identidade de Lagrange: Vamos provar a seguir que para todo inteiro positivo n , tem-se

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$

Para a demonstração acima, considere um grupo de $2n$ pessoas, sendo n homens e n mulheres, e calculemos, de duas maneiras distintas, quantos são os modos de escolher exatamente n das $2n$ pessoas.

Por um lado, a resposta obviamente é $\binom{2n}{n}$. Por outro lado podemos escolher k homens e $n - k$ mulheres de exatamente $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ modos; adicionando tais possibilidades quando k varia de 0 a n , obtemos a soma

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

como resposta alternativa para o nosso problema, onde usamos, na última igualdade, que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Assim, a igualdade do enunciado ocorre. ■

EXERCÍCIOS · PARTE 3

Problema 13. Sejam m e n inteiros positivos. Prove que:

$$\sum_{j=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{j} \binom{n}{j} 2^j = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m}$$

Problema 14. (IMO 1989, problema 3) Sejam n e k inteiros positivos e S um conjunto de n pontos no plano satisfazendo as seguintes condições:

(a) S não contém três pontos colineares.

(b) Para todo ponto $P \in S$ há ao menos k pontos de S equidistantes de P .

Prove que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Problema 15. Mostre que se n e k são inteiros tais que $0 \leq k \leq n$, então todo conjunto com n elementos possui exatamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos com k elementos.

Problema 16. Para cada $n > 1$ inteiro, prove que o número de subconjuntos de I_{2n} com quantidades iguais de elementos pares e ímpares é igual a $\binom{2n}{n}$. (Sugestão: comece escolhendo k elementos pares e k elementos ímpares; em seguida, use a identidade de Lagrange).

Problema 17. Prove a **Identidade de Vandermonde**: para $m, n, p \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p},$$

onde a soma do primeiro membro acima se estende a todos os valores inteiros e não negativos possíveis de k . (Dica: Veja a demonstração de Lagrange)

4. Os lemas de Kaplansky

De quantos modos é possível formar um p -subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$ no qual não haja números consecutivos? Por exemplo, para $n = 6$ e $p = 3$, podemos obter a partir de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ os seguintes 3-subconjuntos nos quais não há elementos consecutivos:

$$\{1, 3, 5\}, \quad \{1, 3, 6\}, \quad \{1, 4, 6\}, \quad \{2, 4, 6\}.$$

Poderíamos ter concluído que há quatro 3-subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sem elementos consecutivos sem necessidade de enumerá-los exaustivamente. Ao formarmos um subconjunto marcamos com um sinal $+$ os elementos do conjunto que farão parte do subconjunto e com o sinal $-$ os elementos que não farão parte do subconjunto.

Assim, $\{1, 3, 5\}$ seria representado por $+ - + - + -$; $\{2, 3, 6\}$ (que não é válido pois 2 e 3 são consecutivos) seria representado por $- + + - - +$.

Ora, para formar um 3-subconjunto sem elementos consecutivos devemos colocar 3 sinais de $+$ e 3 sinais de $-$ em fila, sem que haja dois sinais $+$ consecutivos. Para tal, colocamos os sinais $-$ (1 modo),

e colocamos os sinais $+$ nos 4 espaços assinalados na representação abaixo, com no máximo um sinal por espaço (C_4^3 modos). A resposta fica: $1 \times C_4^3 = 4$.

* — * — * — *

No caso geral temos p sinais de $+$, $n - p$ sinais de $-$ para arrumar sem que haja dois sinais de $+$ consecutivos. Temos 1 modo de colocar os sinais de $-$ e C_{n-p+1}^p modos de colocar os sinais $+$.

Primeiro lema de Kaplansky: O número de p subconjuntos de I_n nos quais não há números consecutivos é

$$f(n, p) = C_{n-p+1}^p.$$

Segundo lema de Kaplansky: O número de p subconjuntos de I_n nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^p.$$

EXERCÍCIOS · PARTE 4

Problema 18. As três provas de um vestibular devem ser realizadas na primeira semana do ano. De quantos modos é possível escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?

Problema 19. Uma fila tem 15 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens, de modo que não fiquem dois homens sentados em cadeiras contíguas. De quantos modos isso pode ser feito?

Problema 20. Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI nos quais não há duas letras S consecutivas?

Problema 21. Sandro deve ter aula de tênis três vezes por semana, durante um semestre. Quantos são os modos de escolher os dias de aula, se Sandro não deseja ter aulas em dias consecutivos?

Problema 22. Dado um decágono, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não consecutivos do decágono?

Problema 23. De quantos modos é possível formar um p -subconjunto de I_n de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto?

5. O princípio da reflexão

Uma partícula, estando no ponto (x, y) , pode se movimentar para o ponto $(x + 1, y + 1)$ ou para o ponto $(x + 1, y - 1)$.

EXERCÍCIOS · PARTE 5

Problema 24. Quantos são os trajetos possíveis da partícula de $(0, 0)$ a $(8, 6)$?

Problema 25. Quantos são os trajetos de $(0, 0)$ a $(10, 4)$?

Problema 26. Quantos dos trajetos do problema anterior tocam na reta $y = -1$?

Problema 27. Numa fila de cinema, m pessoas têm notas de R\$5,00 e n ($n < m$) pessoas têm notas de R\$10,00. A entrada custa R\$5,00.

(a) Quantas são as filas possíveis?

(b) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco?

(c) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar com duas notas de R\$5,00?

6. O Princípio de Dirichlet

Em determinadas situações deseja-se determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo certas propriedades. Enunciaremos a seguir o Princípio de Dirichlet.

Se n objetos forem colocados em no máximo, $n - 1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Exemplo 1: Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos, duas delas aniversariam no mesmo mês.

Exemplo 2: Escolha, dentre os elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, 200\}$, 101 números ao acaso. Mostre que, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles divide o outro.

Solução: Note que, qualquer inteiro n se escreve sob a forma $n = 2^r b$, onde r é um inteiro não-negativo e b é um inteiro ímpar.

Assim, se $n \in \{1, 2, \dots, 200\}$, $n = 2^r b$ e b é um dos inteiros ímpares $1, 3, 5, \dots, 199$. Ora, temos 100 possibilidades para b . Se escolhemos 101 números, dois deles terão o mesmo b . Sejam esses números $n_1 = 2^{r_1} b$ e $n_2 = 2^{r_2} b$. Se $r_1 < r_2$, n_1 divide n_2 . Se $r_2 < r_1$, n_2 divide n_1 . ■

EXERCÍCIOS · PARTE 6

Problema 28. Escolhendo-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Problema 29. Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor?

Problema 30. 63127 candidatos compareceram a uma prova do vestibular (25 questões de múltipla-escolha com 5 alternativas cada). Considere a seguinte afirmação: “Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico a k primeiras questões da prova”. Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que a afirmação acima seja verdadeira?

Gabarito comentado

01. Há 16 296 anagramas. Para cada uma das quatro posições prescritas, restam $7!$ arrumações. Pela inclusão-exclusão,

$$4 \cdot 7! - \binom{4}{2} 6! + \binom{4}{3} 5! - 4! = 16\,296.$$

O “ou” é inclusivo: uma palavra que atende a várias condições é contada uma única vez.

02. 233 e 295, respectivamente. Seja S_j a soma das quantidades de múltiplos comuns aos divisores tomados j a j . Calculando com os mínimos múltiplos comuns,

$$S_2 = 166 + 71 + 100 + 47 + 33 + 14 = 431,$$

$$S_3 = 23 + 33 + 14 + 4 = 74, \quad S_4 = 4.$$

Um número divisível por t dos divisores aparece $\binom{t}{j}$ vezes em S_j . Portanto, os divisíveis por exatamente dois são

$$S_2 - 3S_3 + 6S_4 = 233;$$

os divisíveis por pelo menos dois são $S_2 - 2S_3 + 3S_4 = 295$.

03. 25 resultados. Escreva os pontos como $x + 1, y + 1, z + 1$. Temos $x + y + z = 9$, com $0 \leq x, y, z \leq 5$. Sem o limite superior são $\binom{11}{2}$ soluções. Para cada variável que excede 5, há $\binom{5}{2}$ soluções; duas não podem exceder 5 simultaneamente. Logo,

$$\binom{11}{2} - 3\binom{5}{2} = 55 - 30 = 25.$$

04. Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, temos

$$\varphi(360) = 360 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 96.$$

05. 45 soluções. Se $x > 7$, ponha $x' = x - 8$. A equação vira $x' + y + z = 4$, que tem $\binom{6}{2} = 15$ soluções. O mesmo vale para y e z . Como duas variáveis não podem ser maiores que 7 ao mesmo tempo, a resposta é $3 \cdot 15 = 45$.

06. 200 elementos. Primeiro conte os múltiplos de 3 ou 5 e depois retire os que também são múltiplos de 7:

$$\left(\left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor\right) - \left(\left\lfloor \frac{500}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{105} \right\rfloor\right) = 233 - 33 = 200.$$

07. 906 colorações, considerando os vértices fixos e as duas cores distintas. Num dodecágono regular há quatro triângulos equiláteros disjuntos. Cada um admite $2^3 - 2 = 6$ colorações não monocromáticas; são $6^4 = 1296$ colorações sem triângulos monocromáticos.

Há também três quadrados disjuntos. Para um quadrado prescrito ser monocromático, escolhemos sua cor de 2 modos. Ele fixa um vértice de cada triângulo; os outros dois têm 3 escolhas. Portanto, há $2 \cdot 3^4 = 162$ colorações.

Para dois quadrados prescritos: se suas cores coincidem, a cor do terceiro vértice de cada triângulo fica forçada (2 escolhas ao todo); se diferem, esses quatro vértices ficam livres ($2 \cdot 2^4 = 32$). São 34 colorações. Para os três quadrados, suas cores não podem ser todas iguais: $2^3 - 2 = 6$ escolhas. Logo,

$$1296 - 3 \cdot 162 + 3 \cdot 34 - 6 = \boxed{906}.$$

Um hexágono ou o dodecágono monocromático já conteria um triângulo equilátero monocromático. Assim, excluir triângulos e quadrados basta.

08. Para cada $x \in A$, podemos escolher $f(x)$ entre os outros $n - 1$ elementos, independentemente. Há $(n - 1)^n$ **funções** para $n \geq 1$. As bijetoras são precisamente os desordenamentos:

$$D_n = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Se A for vazio, há uma função, também bijetora; ambas as contagens valem 1.

09. 315 permutações. Escolha os três elementos fixos de $\binom{7}{3}$ modos. Os quatro restantes devem formar um desordenamento, para não criar novos pontos fixos. Logo,

$$\binom{7}{3} D_4 = 35 \cdot 9 = 315.$$

10. Escolha j , a imagem de 1, de $n - 1$ modos. Na decomposição em ciclos, há dois casos: Se 1 e j formam um ciclo de tamanho 2, os outros elementos podem ser desordenados de D_{n-2} modos. Se o ciclo tem tamanho maior, apague 1 desse ciclo: fica um desordenamento dos $n - 1$ elementos restantes. Reciprocamente, em qualquer desses D_{n-1} desordenamentos, inserir 1 imediatamente antes de j recupera uma única permutação. Portanto,

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

11. 190 800 horários. Divida a hora em seis intervalos de dez minutos. O primeiro médico pode ordenar os pacientes de $6!$ modos. Para o segundo, nenhum paciente pode ocupar o mesmo intervalo: são $D_6 = 265$ desordenamentos. Assim,

$$6! D_6 = 720 \cdot 265 = 190\,800.$$

12. A restrição recai apenas nos n números ímpares. Pela inclusão-exclusão, fixe j desses números nos seus lugares, escolha-os de $\binom{n}{j}$ modos e permute os $2n - j$ restantes. A resposta é

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (2n - j)!.$$

13.

$$\sum_{j=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{j} \binom{n}{j} 2^j = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m}.$$

Adote $\binom{a}{b} = 0$ para $b > a$. Considere conjuntos disjuntos M, N com m, n elementos. Conte os pares (K, T) em que $K \subseteq M$, $T \subseteq N \cup K$ e $|T| = m$.

Se $|K| = k$, há $\binom{m}{k} \binom{n+k}{m}$ escolhas. Se $|T \cap N| = j$, escolha esses j elementos de N e os $m - j$ de M de $\binom{n}{j} \binom{m}{m-j}$ modos. Os $m - j$ elementos de $T \cap M$ devem pertencer a K ; os outros j elementos de M podem pertencer ou não a K , dando 2^j escolhas. As duas contagens provam a identidade.

14. Conte os pares $(P, \{A, B\})$ com $P, A, B \in S$, $A \neq B$ e $PA = PB$. Para cada P , os k pontos equidistantes fornecem pelo menos $\binom{k}{2}$ pares: o total é no mínimo $n\binom{k}{2}$.

Por outro lado, P está na mediatriz de AB . Como não há três pontos colineares, cada par $\{A, B\}$ admite no máximo dois pontos P . Portanto,

$$n\binom{k}{2} \leq 2\binom{n}{2}, \quad \text{isto é, } k(k-1) \leq 2(n-1).$$

Daí $(k - \frac{1}{2})^2 \leq 2n - \frac{7}{4} < 2n$, e, como $k \geq 1$,

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

15. Para $k \geq 1$, há $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ listas ordenadas de k elementos distintos. Cada subconjunto aparece em exatamente $k!$ ordens. Logo, a quantidade de subconjuntos é

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Para $k = 0$, há somente o conjunto vazio, em acordo com $\binom{n}{0} = 1$.

16. Entre os elementos de I_{2n} , há n pares e n ímpares. Para cada k , escolhemos k pares e k ímpares de $\binom{n}{k}^2$ modos. Incluindo o conjunto vazio,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

pela identidade de Lagrange.

17. Um conjunto de $m+n$ elementos, dividido em grupos de tamanhos m e n , possui $\binom{m+n}{p}$ subconjuntos de tamanho p . Se um desses subconjuntos contém k elementos do primeiro grupo, contém $p-k$ do segundo, e há $\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ escolhas. Somando os casos disjuntos,

$$\sum_{k=\max(0, p-n)}^{\min(m, p)} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

Se $p > m+n$, ambos os lados são zero.

18. 10 escolhas de dias. Ordene os dias escolhidos: $1 \leq a < b < c \leq 7$, com diferenças de pelo menos 2. A transformação $(a, b, c) \mapsto (a, b-1, c-2)$ dá uma bijeção com os 3-subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Logo são $\binom{5}{3} = 10$ escolhas. Se as três provas forem distintas e sua ordem também precisar ser escolhida, há adicionalmente $3!$ ordens, resultando em 60 cronogramas.

19. 55 440 modos. Pelo primeiro lema de Kaplansky, as cinco cadeiras podem ser escolhidas de $\binom{15-5+1}{5} = \binom{11}{5} = 462$ modos. Os cinco homens distintos podem ocupar essas cadeiras em $5!$ ordens. Logo,

$$\binom{11}{5} 5! = 462 \cdot 120 = 55\,440.$$

20. 1050 anagramas. A palavra impressa, MISSISSIPI, tem quatro I, quatro S, um M e um P. Arrume primeiro as seis letras que não são S: há $6!/4! = 30$ ordens. Elas determinam sete espaços (incluindo as extremidades). Escolha quatro desses espaços para colocar os S, um por espaço:

$$\frac{6!}{4!} \binom{7}{4} = 30 \cdot 35 = 1050.$$

A grafia MISSISSIPPI, com dois P, daria outra resposta; aqui vale exatamente a palavra da fonte.

21. 7 escolhas semanais fixas. A semana se repete; portanto, domingo e segunda-feira também são consecutivos. Pelo segundo lema de Kaplansky,

$$\frac{7}{7-3} \binom{7-3}{3} = \frac{7}{4} \binom{4}{3} = 7.$$

Esta contagem supõe que os mesmos três dias se repetem durante todo o semestre.

22. 50 triângulos. Os dez vértices formam um ciclo. Pelo segundo lema de Kaplansky, a quantidade de escolhas de três vértices sem adjacências é

$$\frac{10}{10-3} \binom{10-3}{3} = \frac{10}{7} \binom{7}{3} = 50.$$

23. Escreva os elementos escolhidos como $a_1 < \dots < a_p$. A condição é $a_{i+1} - a_i \geq r + 1$. Defina $b_i = a_i - r(i-1)$. Então

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_p \leq n - r(p-1).$$

A transformação é reversível. Para $p \geq 1$ e $r \geq 0$ inteiros, a resposta é

$$\boxed{\binom{n - r(p-1)}{p}},$$

se $n - r(p-1) \geq p$, e zero caso contrário. Para $p = 0$, há apenas o subconjunto vazio.

24. 8 trajetos. Em oito passos, se u são subidas e d descidas, temos $u + d = 8$ e $u - d = 6$. Logo $d = 1$. Basta escolher em qual dos oito passos ocorre a única descida: $\binom{8}{1} = 8$.

25. 120 trajetos. Temos $u + d = 10$ e $u - d = 4$, portanto $u = 7$ e $d = 3$. As três descidas podem ocupar $\binom{10}{3} = 120$ posições.

26. 45 trajetos. Reflita, em relação a $y = -1$, o trecho de cada trajeto até seu primeiro encontro com essa reta. Isso transforma o início $(0, 0)$ em $(0, -2)$ e dá uma bijeção com os trajetos de $(0, -2)$ até $(10, 4)$. Agora o deslocamento vertical é 6: são oito subidas e duas descidas. Logo,

$$\binom{10}{2} = 45.$$

27. Considere todas as pessoas distintas. Para qualquer sequência de tipos de nota, há $m!n!$ ordens das pessoas dentro dos dois grupos.

(a) Sem restrições, são $(m+n)!$ filas.

(b) Represente a nota de R\$5 por uma subida e a de R\$10 por uma descida. Sem troco inicial, a fila falha se o saldo chega a -1 . Pela reflexão do trecho até a primeira falha, o número de sequências ruins é $\binom{m+n}{n-1}$. Assim, são

$$m!n! \binom{m+n}{n-1}$$

filas com problemas de troco.

(c) Com duas notas de R\$5 iniciais, a fila falha quando o saldo relativo chega a -3 . Refletindo o trecho inicial nessa reta, o início passa de altura 0 para -6 ; o número de descidas passa a $n-3$. A resposta é

$$m!n! \binom{m+n}{n-3}$$

para $n \geq 3$, e zero para $n < 3$. Se quisermos contar apenas sequências de tipos de nota, sem distinguir as pessoas, basta retirar o fator $m!n!$ de (b) e (c); em (a), a resposta passa a $\binom{m+n}{n}$.

28. Divida o quadrado em quatro quadrados de lado 1. Atribua cada ponto a uma dessas quatro regiões (os pontos nas fronteiras podem ser atribuídos a uma só delas). Pelo princípio de Dirichlet, dois dos cinco pontos pertencem à mesma região. A maior distância em um quadrado de lado 1 é sua diagonal, $\sqrt{2}$. Portanto, esses dois pontos determinam o segmento desejado.

29. **3 meias.** Com duas retiradas, ainda é possível obter uma de cada cor. Com três, como há somente duas cores, pelo princípio de Dirichlet ao menos duas têm a mesma cor.

30. $k = 6$. Admitindo que cada candidato assinala exatamente uma alternativa em cada questão, há 5^k padrões para as primeiras k respostas. Como

$$5^6 = 15\,625 < 63\,127 < 78\,125 = 5^7,$$

para $k = 6$ há mais candidatos que padrões, garantindo repetição. Para $k = 7$, os 63 127 candidatos poderiam escolher padrões distintos; logo não há garantia.