
Conjugados Harmônicos

Das bissetrizes à Geometria Projetiva: uma conexão
entre Ceva, Menelaus e o círculo de Apolônio

Professor Yuri Politano • Politano Aprova

1. Introdução

Na Geometria, algumas configurações revelam propriedades que ultrapassam o contexto em que foram inicialmente estudadas.

É o caso da divisão harmônica de um segmento.

À primeira vista, trata-se de uma propriedade simples: dois pontos dividem um segmento, um internamente e outro externamente, segundo uma mesma razão.

Entretanto, essa condição estabelece relações com resultados fundamentais da Geometria Euclidiana e, de maneira ainda mais surpreendente, permite uma interpretação inteiramente projetiva.

Ao longo deste artigo, investigaremos algumas questões:

- Como as bissetrizes de um triângulo produzem conjugados harmônicos?
- Por que os teoremas de Ceva e Menelaus conduzem naturalmente à divisão harmônica?
- Por que o ponto médio de um segmento não possui conjugado harmônico finito?
- Qual é a origem da palavra *harmônico*?
- Como determinar a distância entre dois conjugados harmônicos?
- Qual é a relação entre esses pontos e o círculo de Apolônio?
- Como construir um conjugado harmônico utilizando exclusivamente uma régua não graduada?

A última questão nos conduzirá a uma observação importante: a divisão harmônica pertence simultaneamente à Geometria Euclidiana e à Geometria Projetiva.

2. Definição de conjugados harmônicos

Considere um segmento AB e dois pontos distintos C e D , pertencentes à reta que contém esse segmento.

Suponha que C pertença ao interior de AB , enquanto D pertença a um dos prolongamentos de AB .



Figura 1. Divisão interna e externa do segmento AB .

Dizemos que C e D são **conjugados harmônicos em relação a A e B** quando

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$$

As razões acima são constituídas por comprimentos ordinários, isto é, sem medidas orientadas.

Observe que há duas condições fundamentais:

1. Um dos pontos divide o segmento internamente, enquanto o outro o divide externamente.
2. Ambos determinam a mesma razão entre suas distâncias aos extremos do segmento.

A igualdade isolada entre as razões, sem a condição de divisão interna e externa, não caracteriza adequadamente a conjugação harmônica.

A configuração formada pelos quatro pontos recebe o nome de **quádrupla harmônica**.

Uma notação frequentemente empregada é

$$(A, B; C, D) = -1,$$

que corresponde à razão dupla dos quatro pontos, escrita mediante segmentos orientados.

A razão dupla é uma das grandezas fundamentais da Geometria Projetiva. Em particular, a condição de razão dupla igual a -1 caracteriza precisamente uma quádrupla harmônica.

Uma observação sobre a terminologia

Os pontos C e D são conjugados entre si relativamente ao par fixo A, B .

A palavra *conjugado* expressa uma relação recíproca: se D é o conjugado harmônico de C , então C também é o conjugado harmônico de D .

Essa reciprocidade será importante posteriormente.

3. A divisão harmônica produzida pelas bissetrizes

Uma das maneiras mais naturais de introduzir a divisão harmônica é por meio do teorema das bissetrizes.

Considere um triângulo PAB , com

$$PA \neq PB.$$

Sejam:

- C , o ponto em que a bissetriz interna do ângulo $\widehat{APB}$ encontra o segmento AB ;
- D , o ponto em que a bissetriz externa do mesmo ângulo encontra a reta AB .

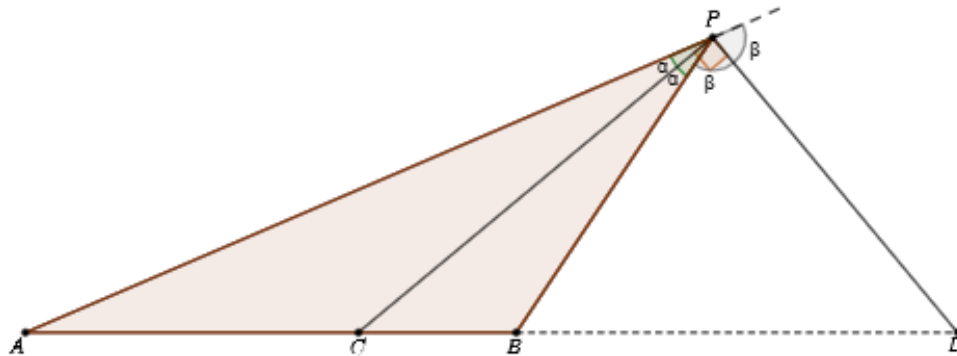


Figura 2. Bissetrizes interna e externa do ângulo $\widehat{APB}$.

Pelo teorema da bissetriz interna,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{PA}{PB}.$$

Por outro lado, pelo teorema da bissetriz externa,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{PA}{PB}.$$

Consequentemente,

$$\boxed{\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = \frac{PA}{PB}}$$

Portanto, C e D são conjugados harmônicos em relação a A e B .

Teorema. As bissetrizes interna e externa de um mesmo ângulo de um triângulo dividem harmonicamente a reta que contém o lado oposto.

O caso particular do triângulo isósceles

O que acontece quando

$$PA = PB?$$

Nesse caso, a bissetriz interna encontra AB exatamente em seu ponto médio.

A bissetriz externa, por ser perpendicular à bissetriz interna, é paralela à base.

Consequentemente, ela não determina um ponto finito sobre a reta AB .

Esse caso especial antecipa uma das propriedades mais interessantes da conjugação harmônica.

4. Por que o ponto médio não possui conjugado harmônico?

Sejam A e B dois pontos distintos e M o ponto médio de AB .

Suponha que exista um ponto finito D , exterior ao segmento, conjugado harmônico de M .

Pela definição,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{DB}.$$

Como M é o ponto médio,

$$AM = MB.$$

Logo,

$$\frac{AD}{DB} = 1,$$

isto é,

$$AD = DB.$$

Mas sabemos que o único ponto da reta equidistante de A e B é o próprio ponto médio M .

Em particular, nenhum ponto exterior ao segmento AB pode satisfazer essa condição.

Obtivemos, portanto, uma contradição.

Concluimos que:

O ponto médio é o único ponto interior de AB que não possui conjugado harmônico finito.

É importante especificar *interior*: os extremos A e B não participam de uma quádrupla harmônica não degenerada com eles mesmos.

4.1. Uma demonstração analítica mais reveladora

Vamos aprofundar essa propriedade.

Considere

$$A = 0, \quad B = L,$$

com $L > 0$.

Seja C um ponto interior ao segmento, de coordenada

$$C = x, \quad 0 < x < L.$$

Denotemos por d a coordenada de seu conjugado harmônico D .

Como C e D dividem harmonicamente AB , temos

$$\frac{x}{L-x} = \frac{d}{d-L}.$$

Aqui, a escrita algébrica é válida porque d e $d-L$ têm o mesmo sinal, já que D é exterior ao segmento.

Multiplicando em cruz,

$$x(d-L) = d(L-x).$$

Desenvolvendo,

$$xd - xL = dL - dx.$$

Assim,

$$2xd - dL = xL.$$

Colocando d em evidência,

$$d(2x - L) = xL.$$

Portanto,

$$d = \frac{xL}{2x - L}$$

Essa expressão determina unicamente o conjugado harmônico de qualquer ponto interior distinto do ponto médio.

Entretanto, quando

$$x = \frac{L}{2},$$

o denominador se anula.

Isso significa que não existe solução finita para d .

Mais ainda: quando x se aproxima do ponto médio, o módulo da coordenada de D cresce indefinidamente.



C próximo de A



C próximo do ponto médio: D afasta-se



C além do ponto médio: D reaparece no prolongamento oposto

De fato,

$$\lim_{x \rightarrow (L/2)^-} \frac{xL}{2x - L} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow (L/2)^+} \frac{xL}{2x - L} = +\infty.$$

Existe, portanto, uma interpretação geométrica especialmente interessante.

4.2. A interpretação projetiva

Na Geometria Euclidiana, duas retas paralelas não possuem ponto de interseção.

Na Geometria Projetiva, cada direção é representada por um ponto no infinito. Dessa maneira, retas paralelas compartilham um mesmo ponto ideal.

É nesse contexto que podemos reinterpretar o resultado anterior.

O conjugado harmônico do ponto médio de um segmento é o ponto no infinito da reta que contém esse segmento.

Não se trata de afirmar que existe um ponto ordinário localizado a uma distância infinitamente grande.

A afirmação significa que, ao ampliar a reta euclidiana para a reta projetiva, a conjugação harmônica passa a incluir também o caso excepcional do ponto médio.

Essa interpretação explica por que a bissetriz externa de um triângulo isósceles é paralela à base: seu encontro com a base ocorre no ponto ideal correspondente àquela direção.

5. Uma conexão entre Ceva, Menelaus e a divisão harmônica

A divisão harmônica também surge de um resultado clássico da Geometria.

A divisão harmônica não depende da existência de ângulos ou bissetrizes.

Ela pode surgir exclusivamente de relações de concorrência e colinearidade.

Considere um triângulo PAB .

Escolha dois pontos:

$$S \in PA \quad \text{e} \quad R \in PB,$$

ambos interiores aos respectivos lados.

Seja

$$Q = AR \cap BS,$$

e considere o ponto C em que a reta PQ encontra o segmento AB :

$$C = PQ \cap AB.$$

Finalmente, prolonguemos RS até encontrar a reta AB em D .

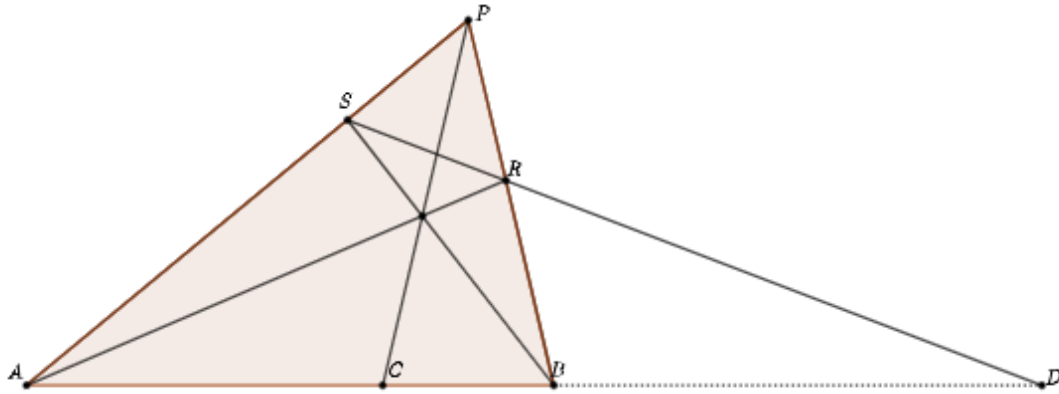


Figura 3. Configuração simultânea dos teoremas de Ceva e Menelaus.

A configuração apresenta duas propriedades simultâneas:

- As retas AR , BS e PC são concorrentes em Q .
- Os pontos R , S e D são colineares.

Essas duas informações permitem aplicar Ceva e Menelaus ao mesmo triângulo.

5.1. Aplicação do teorema de Ceva

No triângulo PAB , as cevianas AR , BS e PC são concorrentes.

Logo,

$$\frac{PS}{SA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1.$$

Isolando a razão que envolve C ,

$$\boxed{\frac{AC}{CB} = \frac{SA}{PS} \cdot \frac{RP}{BR}} \quad (1)$$

5.2. Aplicação do teorema de Menelaus

Agora, consideremos a transversal que passa pelos pontos S , R e D .

Pelo teorema de Menelaus aplicado ao triângulo PAB ,

$$\frac{PS}{SA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1.$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{SA}{PS} \cdot \frac{RP}{BR}} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), obtemos

$$\boxed{\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}}$$

Como C é interior ao segmento AB e D é exterior, concluímos que esses pontos são conjugados harmônicos.

Teorema

Sejam AR e BS cevianas concorrentes em Q ; se $C = PQ \cap AB$ e $D = RS \cap AB$, então C e D são conjugados harmônicos em relação a A e B .

Essa configuração é uma manifestação elementar da propriedade harmônica do quadrilátero completo, uma das construções clássicas da Geometria Projetiva.

O aspecto importante dessa demonstração é que a divisão harmônica surge da combinação entre uma concorrência e uma colinearidade, sem necessidade de qualquer hipótese métrica sobre o triângulo.

6. Qual é a distância entre dois conjugados harmônicos?

A definição de divisão harmônica estabelece uma razão, mas também permite determinar a distância efetiva entre os dois pontos conjugados.

Sejam C e D conjugados harmônicos em relação a A e B , com C interior ao segmento.

Escrevamos

$$AC = m, \quad CB = n.$$

Logo,

$$AB = m + n.$$

Suponhamos, inicialmente, que

$$m \neq n.$$

Tomando

$$A = 0, \quad B = m + n,$$

a coordenada de C é m .

Pela fórmula obtida anteriormente, a coordenada de D será

$$d = \frac{m(m+n)}{2m - (m+n)}.$$

Assim,

$$d = \frac{m(m+n)}{m-n}.$$

A distância entre C e D é

$$CD = |d - m|.$$

Substituindo,

$$CD = \left| \frac{m(m+n)}{m-n} - m \right|.$$

Efetuando as operações,

$$CD = \left| \frac{m(m+n) - m(m-n)}{m-n} \right|.$$

Portanto,

$$CD = \left| \frac{2mn}{m-n} \right|.$$

Concluimos que

$$CD = \frac{2AC \cdot CB}{|AC - CB|}$$

Essa é uma fórmula fundamental para a distância entre dois conjugados harmônicos. Observe novamente o papel excepcional do ponto médio.

Se

$$AC = CB,$$

o denominador se anula, refletindo a inexistência de um conjugado finito.

6.1. Uma segunda expressão: a média harmônica

Podemos escrever a distância CD de uma forma ainda mais interessante.

Sejam

$$AD = u, \quad BD = v.$$

Como D é exterior e C é interior, a igualdade das razões permite demonstrar que

$$CD = \frac{2uv}{u + v}$$

Portanto,

$$CD = \frac{2AD \cdot BD}{AD + BD}$$

Mas essa expressão é precisamente a **média harmônica** dos números positivos AD e BD .

Temos, assim, um resultado particularmente expressivo:

A distância entre dois conjugados harmônicos é igual à média harmônica das distâncias do ponto exterior aos extremos do segmento original.

Equivalentemente,

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BD} \right)$$

Essa igualdade nos conduz naturalmente a uma questão histórica.

7. Por que utilizamos a palavra “harmônico”?

A palavra *harmônico* está historicamente associada à teoria das proporções e à música na tradição matemática grega.

O termo remonta ao grego *harmonía*, relacionado às ideias de ajuste, união e concordância.

Na Antiguidade, o estudo das proporções numéricas estava profundamente relacionado ao estudo dos intervalos musicais.

Os pitagóricos investigavam relações entre comprimentos de cordas vibrantes e intervalos musicais.

Razões simples, como

$$2 : 1$$

e

$$3 : 2,$$

estavam associadas a intervalos musicais fundamentais.

Nesse contexto, desenvolveram-se diferentes formas de estabelecer uma média entre duas grandezas.

Entre elas, destacam-se a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica.

Há registros antigos, associados a Arquitas de Tarento, da classificação dessas três médias no contexto da teoria musical grega. A expressão *harmonic range*, posteriormente utilizada na Geometria, desenvolveu-se a partir dessa tradição da proporção harmônica.

A média harmônica de dois números positivos a e b é definida por

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

No contexto geométrico que estamos estudando, demonstramos que

$$CD = \frac{2AD \cdot BD}{AD + BD}.$$

Ou seja,

$$\boxed{CD = H(AD, BD)}$$

Essa identidade estabelece uma ligação algébrica concreta entre a divisão harmônica e a média harmônica.

A terminologia, portanto, não é meramente decorativa.

Ela conserva uma relação histórica entre proporções geométricas e relações numéricas estudadas desde a Antiguidade.

8. O círculo de Apolônio e os conjugados harmônicos

Considere dois pontos fixos A e B e um número real positivo

$$k \neq 1.$$

Desejamos determinar o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem

$$\frac{PA}{PB} = k.$$

Esse lugar geométrico é denominado **círculo de Apolônio**.

A relação entre esse círculo e a divisão harmônica é especialmente elegante.

8.1. Construção geométrica

Seja P um ponto do lugar geométrico.

Tracemos as bissetrizes interna e externa do ângulo $\widehat{APB}$.

Seus pontos de interseção com a reta AB serão denominados, respectivamente, C e D .

Pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = \frac{PA}{PB} = k.$$

Portanto, C e D são conjugados harmônicos.

Além disso, as bissetrizes interna e externa são perpendiculares.

Logo,

$$\widehat{CPD} = 90^\circ.$$

Pela recíproca do teorema do ângulo inscrito em uma semicircunferência, o ponto P pertence à circunferência de diâmetro CD .

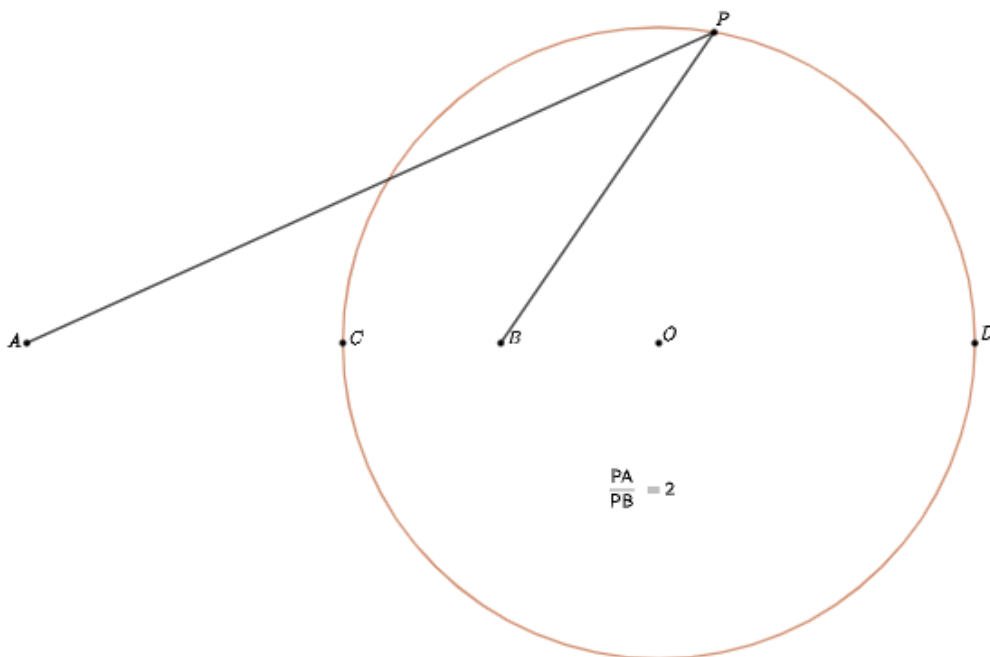


Figura 4. Círculo de Apolônio de diâmetro CD .

Como a razão k determina unicamente C e D , esses pontos são fixos quando P percorre o lugar geométrico.

Reciprocamente, pode-se verificar, pela equação da circunferência ou pela recíproca do teorema das bissetrizes, que todo ponto dessa circunferência satisfaz a razão prescrita.

Nota: a demonstração detalhada dessa recíproca é omitida aqui.

Concluimos que:

O círculo de Apolônio tem como diâmetro
o segmento CD ,

em que C e D são os pontos que dividem harmonicamente AB na razão k .

8.2. Uma fórmula para o raio do círculo de Apolônio

Como CD é o diâmetro,

$$R = \frac{CD}{2}.$$

Mas já demonstramos que

$$CD = \frac{2AC \cdot CB}{|AC - CB|}.$$

Portanto,

$$R = \frac{AC \cdot CB}{|AC - CB|}$$

Essa expressão permite determinar o raio do círculo de Apolônio exclusivamente em função da divisão interna do segmento.

Também podemos escrevê-la em função da razão k .

Se

$$AB = L$$

e

$$\frac{AC}{CB} = k,$$

então

$$AC = \frac{kL}{k+1}$$

e

$$CB = \frac{L}{k+1}.$$

Substituindo na fórmula do raio,

$$R = \frac{\frac{kL^2}{(k+1)^2}}{\left| \frac{(k-1)L}{k+1} \right|}.$$

Simplificando,

$$R = \frac{kL}{|k^2 - 1|}$$

Assim, encontramos duas expressões equivalentes:

$$R = \frac{AC \cdot CB}{|AC - CB|} = \frac{k \cdot AB}{|k^2 - 1|}$$

O que acontece quando $k = 1$?

A condição

$$\frac{PA}{PB} = 1$$

equivale a

$$PA = PB.$$

O lugar geométrico deixa de ser uma circunferência ordinária e passa a ser a mediatriz de AB .

Esse é precisamente o caso em que o ponto de divisão interna é o ponto médio.

A conexão entre as duas exceções não é uma coincidência: ambas decorrem da mesma igualdade entre as razões de divisão.

9. Uma propriedade adicional: conjugados harmônicos e inversão

Há ainda um resultado que enriquece consideravelmente esta teoria.

Seja O o ponto médio de AB .

Suponha que C e D sejam conjugados harmônicos em relação a A e B .

Então,

$$\boxed{OC \cdot OD = OA^2}$$

Essa igualdade merece uma demonstração.

Adotemos um sistema de coordenadas com

$$O = 0, \quad A = -r, \quad B = r.$$

Sejam c e d as coordenadas de C e D .

A condição de conjugação harmônica fornece

$$\frac{c+r}{c-r} = -\frac{d+r}{d-r}.$$

Multiplicando em cruz,

$$(c+r)(d-r) = -(c-r)(d+r).$$

Expandindo,

$$cd - cr + rd - r^2 = -cd - cr + rd + r^2.$$

Simplificando,

$$2cd = 2r^2.$$

Portanto,

$$cd = r^2.$$

Como $cd = r^2 > 0$, os pontos C e D estão no mesmo lado de O ; em módulos,

$$\boxed{OC \cdot OD = OA^2 = OB^2}$$

A interpretação geométrica é especialmente interessante.

Considere a circunferência de centro O e raio OA .

A igualdade

$$OC \cdot OD = OA^2$$

é exatamente a condição para que C e D sejam pontos inversos relativamente a essa circunferência.

Assim, dois conjugados harmônicos de AB são inversos um do outro em relação à circunferência de diâmetro AB .

Essa propriedade fornece uma segunda maneira de entender por que o ponto médio é excepcional.

O ponto O , centro da inversão, não possui imagem finita.

Temos, portanto, três interpretações equivalentes de uma mesma singularidade:

- Na divisão harmônica, o ponto médio não possui conjugado finito.
- Na inversão, o centro não possui imagem finita.
- Na Geometria Projetiva, o conjugado do ponto médio é o ponto no infinito.

10. Como construir o conjugado harmônico utilizando apenas régua?

Chegamos agora à construção que encerra o desenvolvimento teórico.

O problema é o seguinte:

Dados dois pontos distintos A e B e um ponto C interior ao segmento AB , construir o conjugado harmônico de C utilizando exclusivamente uma régua não graduada.

Não podemos utilizar compasso, transferidor, medidas numéricas ou uma paralela previamente construída.

A construção será realizada utilizando apenas retas e suas interseções.

Ela é válida para todo ponto interior C distinto do ponto médio.

10.1. Construção

Passo 1. Escolha um ponto arbitrário P , exterior à reta AB .

Trace as retas

$$PA, \quad PB, \quad PC.$$

Passo 2. Escolha um ponto Q no interior do segmento PC .

Trace as retas

$$AQ \quad \text{e} \quad BQ.$$

Passo 3. Determine os pontos

$$R = AQ \cap PB$$

e

$$S = BQ \cap PA.$$

Passo 4. Trace a reta RS .

Seja

$$D = RS \cap AB.$$

O ponto D é o conjugado harmônico procurado.

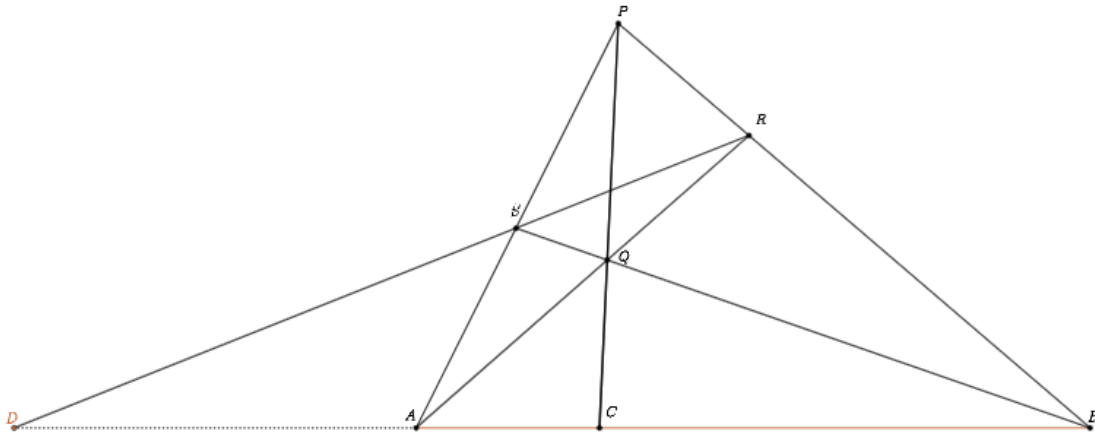


Figura 5. Construção de conjugado harmônico com régua não graduada.

A construção do conjugado harmônico por régua não graduada é uma aplicação clássica das propriedades do quadrilátero completo.

10.2. Demonstração da construção

Observe que as retas

$$AR, \quad BS, \quad PC$$

passam pelo mesmo ponto Q .

Portanto, pelo teorema de Ceva no triângulo PAB ,

$$\frac{PS}{SA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1.$$

Por outro lado, os pontos R, S, D são colineares.

Logo, pelo teorema de Menelaus,

$$\frac{PS}{SA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1.$$

Comparando,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

Consequentemente, C e D são conjugados harmônicos.

A construção está demonstrada.

Por que as escolhas auxiliares não alteram o resultado?

O ponto P foi escolhido arbitrariamente.

O ponto Q também.

Isso significa que podemos produzir diferentes configurações geométricas, com triângulos e retas em posições distintas.

Entretanto, todas conduzem ao mesmo ponto D .

A razão é simples: demonstramos anteriormente que, para cada ponto interior C distinto do ponto médio, existe um único conjugado harmônico finito em relação a A, B .

Assim, a construção é independente das escolhas auxiliares.

E se C for o ponto médio?

Nesse caso, a reta RS será paralela a AB .

Consequentemente, não haverá interseção finita.

A própria construção reproduz geometricamente a singularidade do ponto médio!

11. Por que essa construção é tão importante?

Enquanto os métodos anteriores utilizam bissetrizes, razões entre comprimentos e os teoremas de Ceva e Menelaus, a construção com régua não graduada utiliza exclusivamente relações de incidência: pontos pertencentes a retas, interseções, colinearidade e concorrência.

Nenhuma distância precisa ser conhecida, nenhum ângulo precisa ser determinado e nenhuma circunferência precisa ser construída.

Esse fato revela que a conjugação harmônica não é essencialmente uma propriedade de comprimentos ou ângulos, mas uma propriedade projetiva que admite interpretações métricas particularmente ricas.

12. Conclusão

A divisão harmônica pode ser introduzida como uma igualdade de razões, mas seu significado geométrico é consideravelmente mais amplo.

As bissetrizes mostram como essa relação surge naturalmente em um triângulo.

Ceva e Menelaus revelam que a mesma propriedade pode resultar da combinação entre concorrência e colinearidade.

A média harmônica estabelece uma conexão com a tradição matemática grega e com o estudo das proporções.

O círculo de Apolônio mostra que dois conjugados harmônicos podem determinar uma circunferência inteira, caracterizada por uma razão constante entre distâncias.

A inversão fornece outra interpretação para a relação entre os pontos conjugados.

Finalmente, a construção com régua não graduada revela que a conjugação harmônica sobrevive quando abandonamos as medidas e preservamos apenas as relações de incidência.

O ponto médio desempenha um papel singular em toda essa teoria.

Ele não possui conjugado harmônico finito, corresponde ao centro da inversão associada e tem como conjugado projetivo o ponto no infinito da reta.

A divisão harmônica é, portanto, um exemplo de como uma propriedade elementar da Geometria Plana pode conduzir a estruturas matemáticas muito mais profundas.