

---

# O Radical de Heron:

uma demonstração geométrica via incírculo e excírculo

Professor Yuri Politano • Politano Aprova

---

## Resumo

Neste aceptor matemático apresentaremos uma demonstração pouco usual para a fórmula de Heron. Antes disso, deduziremos uma expressão para a altura de um triângulo em função de seus três lados e do semiperímetro. Em seguida, utilizaremos o incírculo, um excírculo e duas identidades de área para obter o radical de Heron a partir de uma relação de semelhança.

## 1 Uma fórmula para a altura

Considere um triângulo não degenerado  $ABC$ , com

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

e seja  $h_a$  a altura relativa ao lado  $a$ . Denotaremos por

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

o semiperímetro.

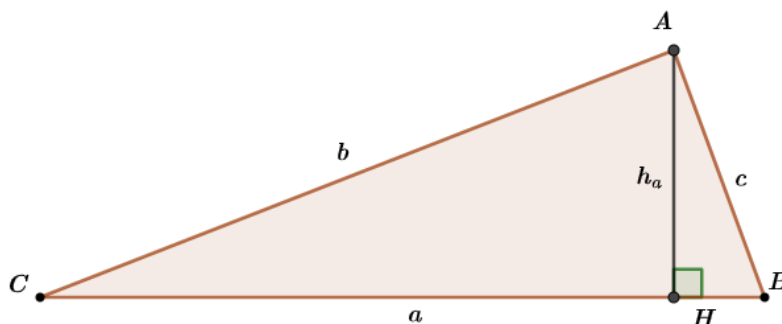


Figura 1: Altura  $h_a$  relativa ao lado  $a$ .

A expressão que desejamos demonstrar é

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1)$$

## Demonstração

Seja  $H$  o pé da perpendicular traçada de  $A$  à reta  $BC$  e ponha

$$\alpha = \angle BCA.$$

Pela Lei dos Cossenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Como a projeção de  $CA$  sobre a reta  $CB$  tem comprimento algébrico  $b \cos \alpha$ , obtemos

$$CH = b \cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

No triângulo retângulo  $ACH$ ,

$$b^2 = h_a^2 + CH^2,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} h_a^2 &= b^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2, \\ 4a^2 h_a^2 &= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2, \\ &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2), \\ &= ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2), \\ &= (a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b). \end{aligned}$$

Como

$$a+b+c=2p, \quad a+b-c=2(p-c), \quad b+c-a=2(p-a), \quad a+c-b=2(p-b),$$

segue que

$$4a^2 h_a^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Como  $h_a > 0$  em um triângulo não degenerado, extraímos a raiz positiva e chegamos a (1).

## 2 O radical de Heron

Se  $\mathcal{A}$  denota a área do triângulo, a fórmula de Heron afirma que

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}. \quad (2)$$

Naturalmente, (2) já decorre de (1), pois  $\mathcal{A} = ah_a/2$ . Nosso objetivo, entretanto, é apresentar uma segunda demonstração, geometricamente distinta, baseada no incírculo e em um excírculo.

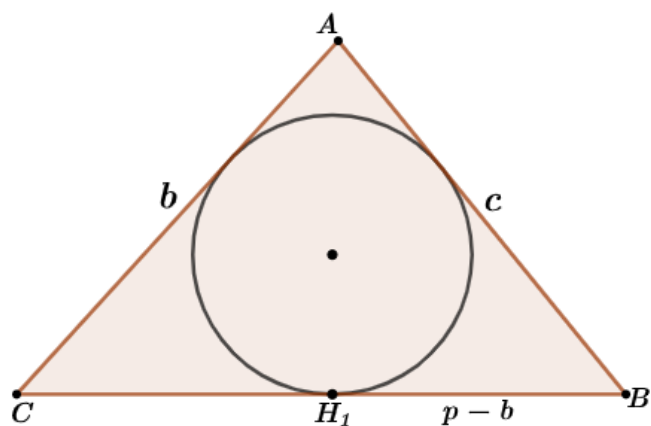


Figura 2: Incírculo e o segmento  $BH_1 = p - b$ .

## 2.1 Dois fatos de tangência

Seja o incírculo tangente a  $BC$  em  $H_1$ . Pelos segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto a uma circunferência, os comprimentos dos dois segmentos de tangência são iguais. Se  $BH_1 = x$ , então, escrevendo os segmentos tangentes a partir de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , obtemos imediatamente

$$\boxed{BH_1 = p - b}.$$

Agora considere o excírculo oposto ao vértice  $C$ , de raio  $r_c$ , tangente ao prolongamento de  $BC$  em  $H_2$ . Pelo mesmo teorema dos segmentos tangentes,

$$\boxed{BH_2 = p - a}.$$

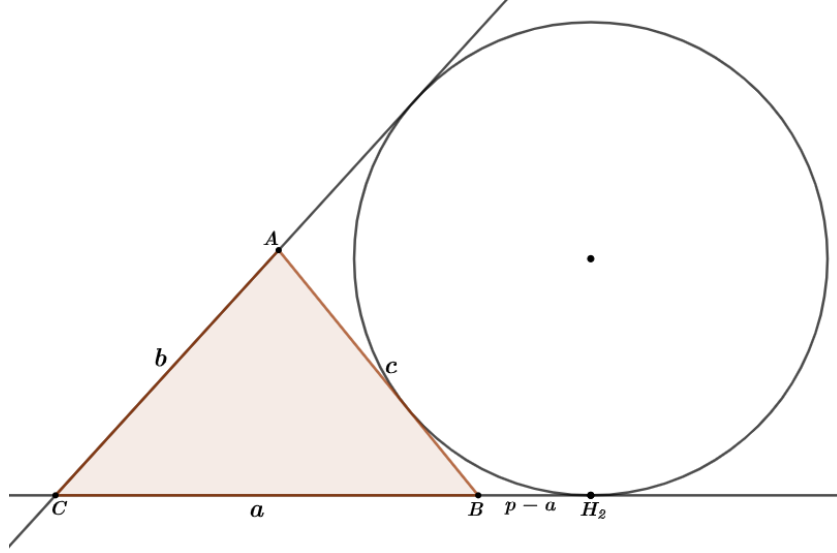


Figura 3: Excírculo oposto a  $C$  e o segmento  $BH_2 = p - a$ .

## 2.2 A semelhança fundamental

Denotemos por  $O_1$  o incentro, por  $O_2$  o excentro oposto a  $C$ , por  $r$  o inraio e por  $r_c$  o exraio correspondente.

Os triângulos retângulos  $O_1H_1B$  e  $O_2H_2B$  são semelhantes.  $BO_1$  é a bissetriz interna do ângulo  $B$ , formando  $B/2$  com  $BC$ ;  $BO_2$  é a bissetriz externa, perpendicular à interna, formando  $90^\circ - B/2$  com o prolongamento de  $BC$ . Logo, os triângulos retângulos  $O_1H_1B$  e  $O_2H_2B$  têm os mesmos ângulos agudos e são semelhantes pelo critério AA. Na figura,  $\theta = B/2$  e  $\phi = 90^\circ - B/2$ .

$$\triangle O_1H_1B \sim \triangle O_2H_2B.$$

Da semelhança,

$$\frac{r}{BH_1} = \frac{BH_2}{r_c}.$$

Usando  $BH_1 = p - b$  e  $BH_2 = p - a$ , obtemos

$$\boxed{rr_c = (p - a)(p - b)}. \quad (3)$$

## 2.3 A área fecha a demonstração

Para o incírculo, decompondo  $ABC$  nos três triângulos com vértice no incentro,

$$\mathcal{A} = pr, \quad \text{logo} \quad r = \frac{\mathcal{A}}{p}.$$

Para o excírculo oposto a  $C$ , a decomposição orientada das áreas fornece:  $\mathcal{A} = [O_2CA] + [O_2CB] - [O_2AB] = (b \cdot r_c + a \cdot r_c - c \cdot r_c)/2 = r_c \cdot (a + b - c)/2 = (p - c)r_c$ .

$$\mathcal{A} = (p - c)r_c, \quad \text{logo} \quad r_c = \frac{\mathcal{A}}{p - c}.$$

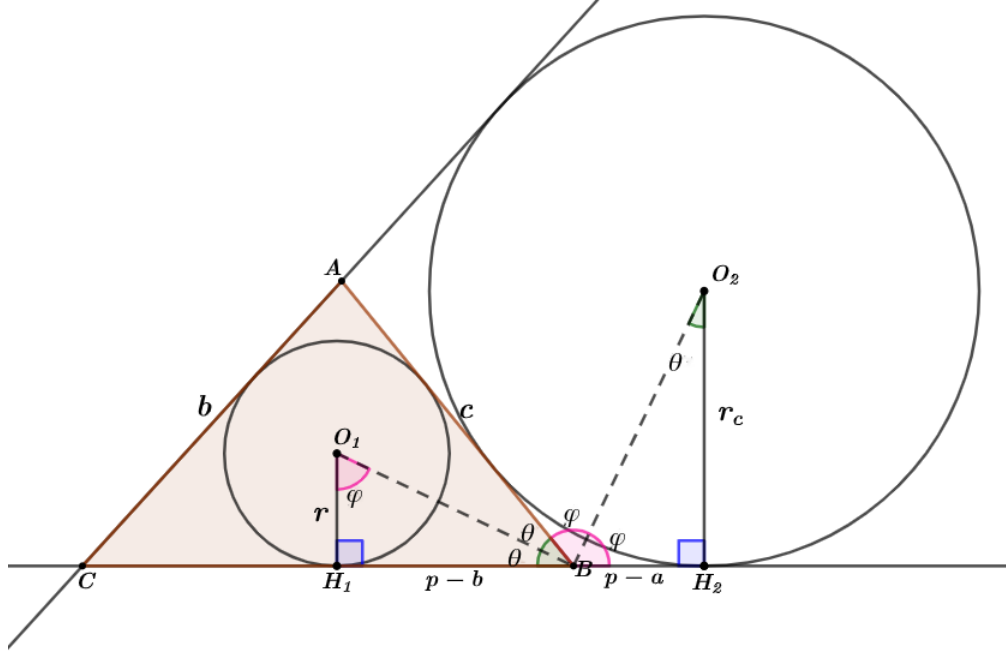


Figura 4: Configuração que produz a semelhança entre  $O_1H_1B$  e  $O_2H_2B$ .

Substituindo essas duas expressões em (3),

$$\frac{\mathcal{A}}{p} \cdot \frac{\mathcal{A}}{p-c} = (p-a)(p-b).$$

Consequentemente,

$$\mathcal{A}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Como  $\mathcal{A} > 0$  para um triângulo não degenerado,

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Está demonstrada a fórmula de Heron.

## Nota final: o que o radical “sabe” sobre o triângulo

A expressão sob o radical não é apenas um artifício algébrico. Para um triângulo não degenerado,

$$p > 0, \quad p-a > 0, \quad p-b > 0, \quad p-c > 0,$$

pois essas três últimas desigualdades são exatamente equivalentes às desigualdades triangulares

$$b+c > a, \quad a+c > b, \quad a+b > c.$$

Assim, o próprio radicando de Heron codifica a condição de existência de um triângulo não degenerado. Quando, por exemplo,  $a = b+c$ , temos  $p-a = 0$  e a área se anula: o triângulo degenera em um segmento.

Há ainda uma identidade útil:

$$16\mathcal{A}^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

que evidencia de modo simétrico a dependência da área em relação aos três lados.